

DE AAP EN DE BANAAN

Misschien een wat rare titel om in het tijdschrift van VELEWE te verschijnen, maar dit was één van de proeven van de sessie F3 van het 8^{ste} Wetenschapscongres in Kortrijk.

Een aap (m_1) is in evenwicht met een tros bananen (m_2) via een touw over een tak. Aap en banaan hebben identieke massa's ($m_1 = m_2 = m$). Wenst de aap toch bij de bananen te komen dan moet hij gaan slingeren, waardoor aap en bananen uiteindelijk op dezelfde hoogte komen.

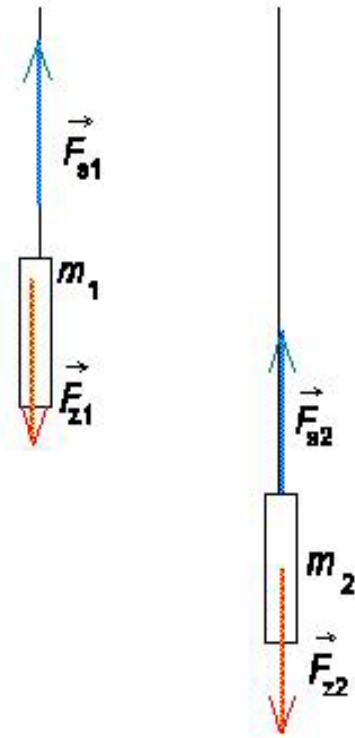
We trachten een fysische verklaring te geven voor dit fenomeen. We sluiten (zoals gebruikelijk) de wrijving uit - wat zeer goed benaderd wordt door te werken met één (of twee) goede katrol (len).

Figuur aap en banaan



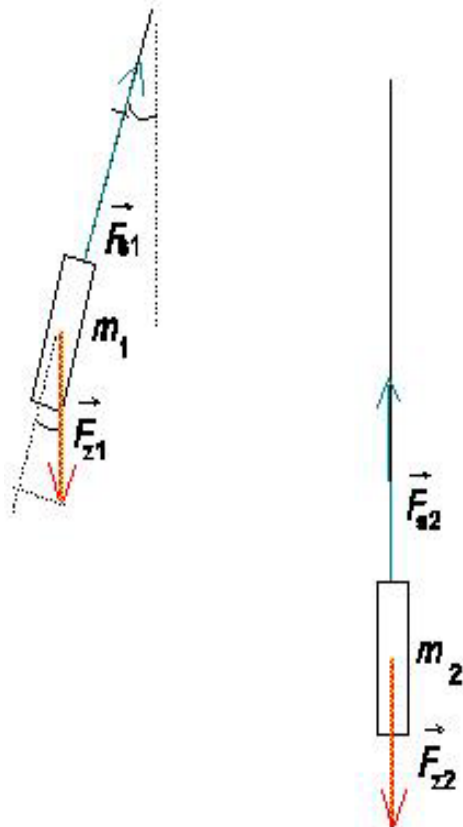
1. Bij evenwicht - aap en bananen in rust.

In evenwicht zijn beide lichamen in rust $F_{t1} = F_{t2}$. Alle inwerkende krachten: de spankrachten in het touw en de zwaartekrachten zijn even groot (figuur 1).



2. In beweging - de aap (m_1) begint te slingeren

We geven de massa m_1 nu een uitwijking zodat ze begint te slingeren (figuur 2).



We bekijken de situatie voor een willekeurige uitwijkingshoek $0 < \alpha < \alpha_{\max}$ van het touw met de verticale (ruststand).

De spankracht die het touw uitoefent op massa m_1 wordt nu niet meer alleen veroorzaakt door de zwaartekracht

$$F_{1z} \cos \alpha = m g \cos \alpha$$

maar tevens door de middelpuntzoekende kracht die de cirkelbeweging, die de massa nu uitvoert, veroorzaakt

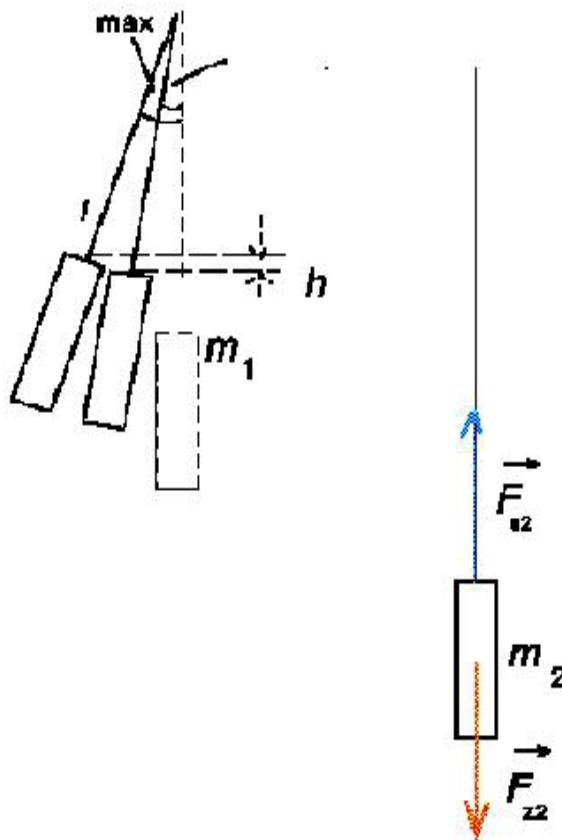
$$F_{1c} = m v^2 / l$$

waarin l de lengte van het slingertouw voorstelt.

De resulterende spankrachten (actie en reactie) in het touw bedragen dan:

$$F'_{1s} = F'_{2s} = m g \cos \alpha + m v^2 / l = F'_s \quad (1)$$

De waarde van v kunnen we via energiebeschouwingen berekenen (figuur 3):



$$\Delta E_k = \Delta E_p$$

$$m v^2 / 2 = m g h$$

$$v^2 = 2 g h$$

en uit figuur 3 leiden we af dat

$$h = l \cos \alpha - l \cos \alpha_{\max}$$

$$h = l (\cos \alpha - \cos \alpha_{\max})$$

$$\text{zodat } v^2 = 2 g l (\cos \alpha - \cos \alpha_{\max})$$

$$F_{c1} = m v^2 / l = 2 m g (\cos \alpha - \cos \alpha_{\max})$$

De spankrachten (1) in het touw worden dan:

$$F'_s = m g \cos \alpha + 2 m g (\cos \alpha - \cos \alpha_{\max})$$

$$F'_s = m g (3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_{\max})$$

De resulterende kracht op de massa m_2 (bananen) wordt dan:

$$F_{r2} = F'_{s2} + F_{z2}$$

$$F_{r2} = | F'_{s2} - F_{z2} |$$

$$F_{r2} = | m_2 g (3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_{\max}) - m_2 g |$$

$$F_{r2} = m_2 g | 3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_{\max} - 1 |$$

De waarde van de resultante en de zin ervan hangt af van de waarde van de uitdrukking

$$3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_{\max} - 1 \quad (2)$$

Is de uitdrukking (2) < 0 , dit betekent dat $F'_{s2} < F_{z2}$, dan ontstaat een versnelling naar beneden (de bananen dalen !!! t.o.v. de aap).

Is de uitdrukking (2) > 0 , dit betekent dat $F'_{s2} > F_{z2}$, dan ontstaat een versnelling waardoor de bananen stijgen en de aap daalt.

Voor welke hoek α_0 keert de beweging om?

$$\text{Dan moet } 3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_{\max} - 1 = 0$$

waaruit $\alpha_0 = \text{bgtg} (1/3 + 2/3 \cos \alpha_{\max})$

α_0 hangt dus af van de maximale uitwijking

Enkele hoekwaarden

$\alpha_{\max} (^\circ)$	$\alpha_0 (^\circ)$
10,0	8,11
15,0	12,3
20,0	16,3
25,0	20,4

3. Nettowaarden van de resulterende kracht op m_2 (bananen) in de uiterste standen

3.1 Grootste uitwijking: $\alpha = \alpha_{\max} - F_{c1}$ is dan nul !

$\alpha > \alpha_0$ dit betekent dat $F'_{s2} < F_{z2}$

dan geldt: $F_{r2} = m g \left| 3 \cos \alpha_{\max} - 2 \cos \alpha_{\max} - 1 \right|$

$$F_{r2} = m g (1 - \cos \alpha_{\max})$$

de massa m_2 (de bananen) krijgt een versnelling $a = g (1 - \cos \alpha_{\max})$ naar beneden

3.2 Doorgang in de evenwichtstand: $\alpha = 0 - F_{c1}$ is dan maximaal!

$\alpha < \alpha_0$ dit betekent dat $F'_{s2} > F_{z2}$

$F_{r2} = m g \left| 3 \cos 0 - 2 \cos \alpha_{\max} - 1 \right|$

$$F_{r2} = 2 m g (1 - \cos \alpha_{\max})$$

Dit betekent dat de bananen nu een versnelling $2 g (1 - \cos \alpha_{\max})$ naar omhoog krijgen.

4 Nabeschuwing

Uit de tabel met hoekwaarden volgt dat in de meeste standen (voor de meeste uitwijkingshoeken) de nettokracht op de massa m_2 naar boven is gericht. Daarenboven is de maximale opwaartse versnelling dubbel zo groot als de maximale neerwaartse versnelling. We zien de massa dus op en neer gaan, maar netto meer naar omhoog.

M. Debusschere
G. Van Haute

Bronnen
Fundamentals of physics Extended fourth edition
Resnick and Halliday